TD3 - Analyse de Fourier et filtres

L'analyse de Fourier est un outil essentiel du physicien car la décomposition de toute fonction périodique en une somme de fonctions harmoniques permet de ramener un problème compliqué au problème beaucoup plus simple de la réponse à une perturbation harmonique. Le but de ce TD est d'utiliser cet outil à l'étude d'un filtre bien que son champ d'application soit beaucoup plus vaste en physique : optique ondulatoire, mécanique quantique, électromagnétisme, ondes mécaniques...

On encapsulera le travail pour chaque sous-partie.

1 Série de Fourier

On montre que toute fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega$ peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux de pulsation égale (fondamental) ou multiples (harmoniques) de la pulsation du signal donné, de la forme, avec $n \in \mathbb{N}$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{i=1}^{n} b_n \sin(n\omega t)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,d$$

- Si la fonction est paire, $f(-t) = f(t)$, ce qui entraîne $b_n = 0\ \forall n$.
- Si la fonction est impaire, $f(-t) = -f(t)$, ce qui entraîne $a_n = 0\ \forall n$.

On désigne par **spectre d'amplitude** la représentation a_n et b_n en fonction de ω ou f ou encore n.

1. On désire tracer le spectre de Fourier de la fonctions $f(t) = \cos^5(2\pi t)$.
   Tracer cette fonction sur $[-1;1]$.
   Quelle est la période et la parité de cette fonction ?

2. Calculer le coefficient a_0 de cette fonction.
   Le coefficient a_0 de $f(t)$ était-il prévisible ?
   Quelle est la signification physique de $a_0/2$?

3. Calculer le coefficient b_0 de cette fonction. Cette valeur est-elle différente pour une autre fonction ?

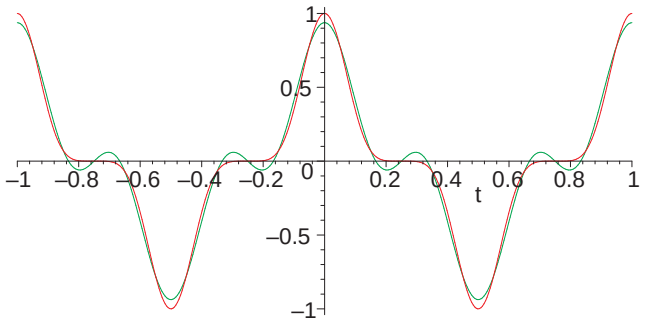
4. On désire créer des procédure pour calculer a_n et b_n en fonction de n et de la fonction $f(t)$.
   Étendre le travail suivant pour calculer les coefficients a_n et b_n (coefficients de Fourier)

```
>a :=proc(n,g)
  2/T*int(g(t)*cos(2*Pi/T*n*t),t=0..T)
  end :
```

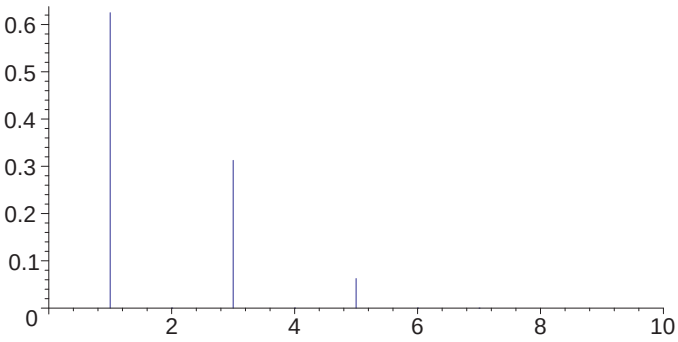
4. Il faut ensuite sommer les cosinus et les sinus avec les bonnes amplitudes, a_n et b_n. C'est le but de la procédure suivante.

```
>somme :=proc(n,g)
  local i :
  a(0,g)/2+sum('a(i,g)*cos(2*Pi/T*i*t)
                +b(i,g)*sin(2*Pi/T*i*t)',i=1..n) ;
  end :
```

5. Donner une expression analytique des coefficients a_n et b_n en fonction de n, puis évaluer les coefficients a_n et b_n pour $n \in [0,10]$. Quel est le "nombre de cosinus et de sinus" nécessaire pour reconstituer la fonction ? Comparer le graphique de la fonction et de la fonction recomposée.

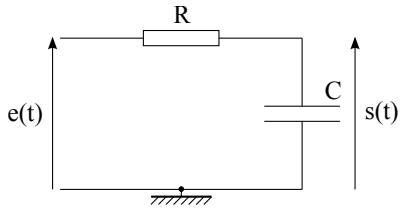


6. On désire tracer le spectre en amplitude des a_n en fonction de f (ici $b_n = 0$). Pour cela, on utilise la séquence suivante où les traits représentent les amplitudes associées aux cosinus nécessaires pour recomposer la fonction.
   >display(seq(plot([[i,0],[i,a(i,f)]],0..10),i=1..7)) ;



2 Étude du filtre

On considère le filtre ci-dessous :



1. Montrer que la fonction de transfert s'écrit

$$H_1 = \frac{1}{1+jx}$$

avec $x = \omega/\omega_0$ où $\omega_0 = 1/RC = 1/\tau$.

2. Tracer les diagrammes de Bode du gain et de la phase pour chacun des filtres.

On utilisera la fonction `semilogplot()` pour le tracé en échelle semi-logarithmique.

3 Utilisation des séries de Fourier en traitement du signal

On cherche à comprendre ici quelle est l'action d'un filtre sur un signal périodique. Dans une première partie on calcule les composantes de Fourier d'un signal créneau. On vérifie tout d'abord que la recombinaison d'un certain nombre de composantes reproduit (plus ou moins !) le signal de départ, puis on calcule l'action du filtre sur chaque composante (amplitude et phase) qui après recombinaison fournit (toujours plus ou moins) le signal de sortie. Enfin dans une dernière partie on compare la solution calculée par la série de Fourier avec la solution numérique de l'équation différentielle de chaque filtre.

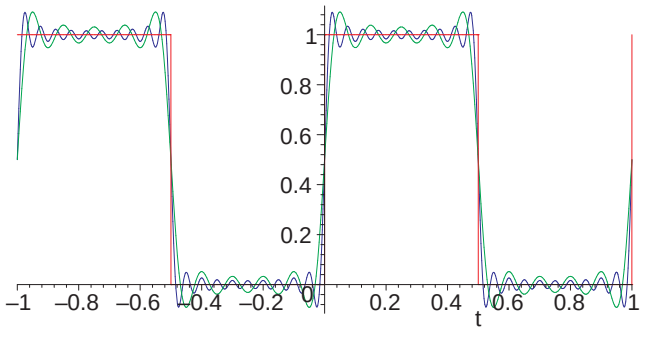
3.1 Fonction créneau

1. On souhaite définir une fonction créneau paire, $e(t)$, de période $T = 1$ valant 1 sur une demi-période et 0 sur l'autre demi-période.
e :=t->(cos(Pi*floor(2*t)/2))**2 ;

2. Tracer cette fonction sur l'intervalle $[-3, 3]$.

3. Calculer analytiquement a_n et b_n en fonction de n. On pourra utiliser la fonction `assume()` pour la propriété particulière de n.
Évaluer les coefficients a_n et b_n pour $n \in [0, 10]$.

4. Reconstruire la fonction de départ à partir de son développement à l'ordre N fini.
Comparer graphiquement cette reconstruction avec la fonction initiale en fonction de N (On pourra prendre $N = 10$ puis 20). Commentez le résultat.



3.2 Filtre du premier ordre

1. Calculer l'expression du signal de sortie pour $\tau = T/10$, T, $10 \times T$ en appliquant la fonction de transfert H_1 calculée à la première question, à la série de Fourier de la fonction créneau. Effectuer le tracé sur 2 ou 3 périodes. Commentaires ?

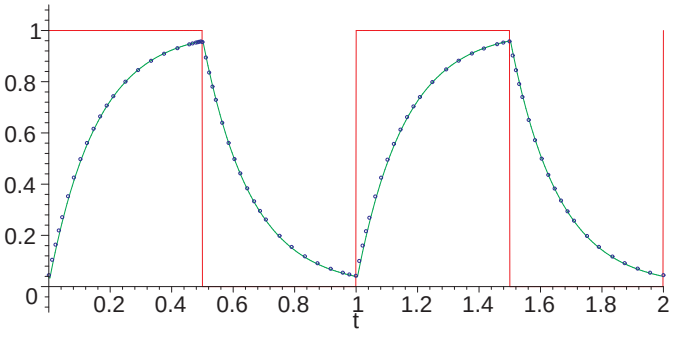
2. On veut comparer cette solution en série de Fourier avec la solution directe par résolution numérique de l'équation différentielle du filtre.

   (a) Établir que l'équation différentielle du filtre du premier ordre s'écrit :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

   (b) Résoudre numériquement cette équation en utilisant l'algorithme d'Euler. Attention prévoir une phase de relaxation pour que la solution transitoire disparaisse car on cherche la solution en régime permanent.

   (c) Comparer avec la solution en série de Fourier.



3.3 Filtre du second ordre

Reprendre l'étude précédente pour un filtre du second ordre passe bas (RLC série) avec un facteur de qualité de 3. On rappelle que la fonction de transfert s'écrit canoniquement

$$H_2 = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$