

TD2 - Mouvements à forces centrales, Collisions de galaxies

La classification est l'une des premières activités liées à la naissance d'une nouvelle discipline scientifique, l'étude des galaxies initiée par Hubble dans les années 1930 n'échappe pas à cette règle. Cependant il apparut rapidement qu'un certain nombre de galaxies ne rentraient pas dans les schémas morphologiques généraux (elliptique, spirale...), on leur donna le nom de galaxies irrégulières. Parmi celles-ci certaines présentent des « ponts de matière » entre deux noyaux. L'apparition des calculateurs dans années 1950-60 permit de tester l'hypothèse de forces de marée s'exerçant entre 2 galaxies en collision. On se propose dans ce TD de retrouver schématiquement les conditions physiques nécessaires à l'apparition de ces « ponts de matière » entre 2 galaxies.

On va s'attacher dans un premier temps à résoudre des équations différentielles par des méthodes numériques puis nous développerons un mécanisme de création d'animation des solutions obtenues.

On encapsulera le travail pour chaque sous-partie.

à un instant donné sur une image puis de faire défiler ces images pour en obtenir une animation. On donne l'exemple suivant, où la boucle for permet de récupérer la solution et de la stocker dans un graphique.

Que représente alors $P[0]$? et $P[100]$?

1 Particule soumise à une force centrale

- Exprimer vectoriellement l'équation du mouvement d'une particule de masse m soumise à la force de gravitation d'une particule de masse M supposée fixe dans un référentiel galiléen. On posera par la suite $M = 1$, $m = 1$ et G la constante de gravitation égale aussi à 1.
- On montre que le mouvement est plan. Donner le système d'équations différentielles en coordonnées cartésiennes x et y de ce plan de l'équation vectorielle précédente.
- Résoudre ce système en utilisant la fonction : `dsolve({sysODE, ICs}, option)` où `sysODE` est l'ensemble des équations différentielles et `ICs` est l'ensemble des conditions initiales. On donne l'exemple suivant où les équations différentielles et les conditions initiales ($x(0) = \sqrt{2}$; $y(0) = \sqrt{2}$; $\dot{x}(0) = -0,5$; $\dot{y}(0) = 0$) sont à compléter.

Ex. 1 Résolution de l'équation différentielle

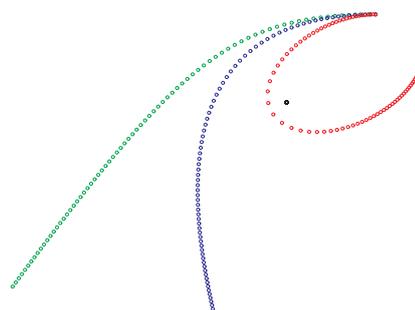
```
> restart :
> with(plots) :
> Eqx :=.....;
> Eqy :=.....;
> Sys :={Eqx,Eqy} :
> InitG :={.....} :
> Sol := dsolve(Sys union InitG ,type=numeric,output=
listprocedure);
> xn := eval(x(t),Sol);
> yn := eval(y(t),Sol);
```

- De la résolution précédente, on veut tracer une animation. Il s'agit alors dessiner la position de la particule

Ex. 2 Extraction des solutions numériques

```
> tini :=0 :
> tfin :=9.5 :
> Nimages :=100 :
> h :=(tfin-tini)/Nimages :
> for i from 0 to Nimages do
>   t :=tini+i*h :
>   P1 :=plot([[xn(t),yn(t)],color=red) :
>   P[i] :=display(P1) :
> od :
> display(seq(P[i],i=0..Nimages),style=POINT,symbol=
CIRCLE,scaling=CONSTRAINED);
```

- Pour créer une animation, reprendre la dernière ligne de code en ajoutant l'option `insequence=true`.



- Trouver les conditions initiales telles que, en faisant varier la norme de la vitesse initiale de M (mais ni sa direction, ni sa position initiale), on puisse avoir un mouvement parabolique. On rappelle que pour un mouvement parabolique $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa}{r} = 0$ avec $\kappa = GMm$.
- Tester enfin $v_x = -1.3$. Quel est alors le type de mouvement obtenu ?

8. Trouver enfin des conditions initiales (vitesse et position) telles que le mouvement soit circulaire.

On rappelle que pour une trajectoire circulaire $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa}{R} = -\frac{\kappa}{2R}$ et que la vitesse est, à tout moment, orthogonale au vecteur position.

2 Deux particules en interaction

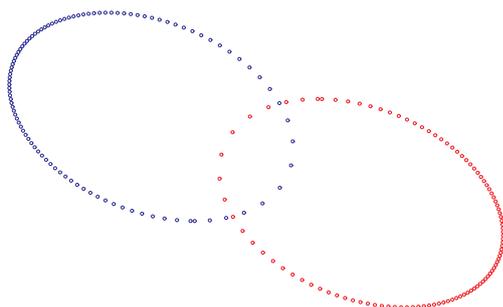
On reprend la séquence : mise en équations, tracé de la trajectoire et animation pour l'étude de 2 particules en interaction gravitationnelle.

A. Particules de même masse

1. Écrire le système d'équations différentielles de ces 2 particules en supposant qu'elles ont même masse que l'on prendra égale à 1 dans cette partie.

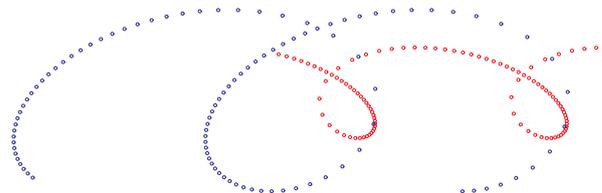
Donner le système d'équations en coordonnées cartésiennes : on notera (x_A, y_A) les coordonnées de la particule A et (x_B, y_B) les coordonnées de la particule B .

2. Résoudre ce système d'équations avec la fonction dsolve en n'oubliant pas de spécifier les conditions initiales $(x_A(0) = 1, y_A(0) = 1; \dot{x}_A(0) = -0,5; \dot{y}_A(0) = 0; x_B(0) = -1; y_B(0) = -1; \dot{x}_B(0) = 0,5; \dot{y}_B(0) = 0)$. On prendra un temps de résolution égal à $t_{fin} = 47$.
3. Tracer les trajectoires puis construire une animation.
4. Où se trouve le barycentre d'un tel système? Est-il en mouvement? Pourquoi?



B. Particules de masses différentes

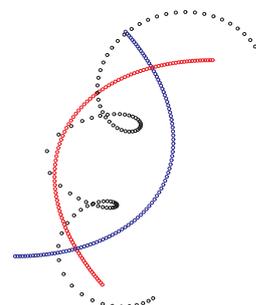
1. Modifier le code précédent pour prendre en compte dans la résolution que M_A est différent de M_B . On prendra par exemple $M_A = 2$ et $t_{fin} = 30$.
2. Faire une animation de la trajectoire du barycentre du système. Quel est son mouvement?
3. Faire une animation du mouvement de A et B dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* .



3 Trois particules en interaction

On rajoute à présent une particule test de masse m initialement en rotation circulaire uniforme autour de la galaxie A .

1. Écrire le système d'équations différentielles auquel obéit cette particule test lorsqu'elle subit l'interaction gravitationnelle des galaxies A et B .
2. Intégrer ce système d'équations au système d'équations des galaxies A et B et résoudre l'ensemble de ces 6 équations différentielles du second ordre à l'aide de la fonction dsolve et de conditions initiales bien choisies.
Le rayon du mouvement de la particule test pourra être de 0,5 ($x_{Test}(0) = 1,5; y_A(0) = 1$) alors que les conditions initiales sur A et B restent inchangées.
3. Tracer les trajectoires puis construire une animation.



4 Collision de 2 galaxies

1. Généraliser la procédure précédente en répartissant N_A particules tests en rotation initiale autour de A et N_B particules tests en rotation initiale autour de B . Attention le temps de calcul peut devenir prohibitif (ne pas dépasser un total de 10 particules dans un premier temps)
2. Comparer les effets de marée responsable de la formation de ponts de matière suivant que le moment cinétique intrinsèque de chaque galaxie est de même sens ou opposé au moment cinétique de l'ensemble.