TD1 - Portrait de phase des oscillateurs

Le but de ce premier TD est de se familiariser avec l'environnement Maple (Évaluation des valeurs de fonction et de ses dérivées, tracés de graphique, résolution numérique d'équations différentielles...) en étudiant les portraits de phase des oscillateurs, linéaires dans un premier temps puis, non linéaires.

On désire tracer l'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique. Pour résoudre de manière numérique, l'équation d'évolution temporelle, il faut préciser les conditions initiales à l'algorithme, ainsi que les paramètres de l'oscillateur. Pour un oscillateur harmonique, seule la pulsation (ou la période) est une grandeur physique pertinente.

Sauf mention contraire, dans tout ce TD, nous utiliserons $\omega_0 = 1\,\mathrm{rad.s}^{-1}$ et l'intervalle $t_{min} = 0$ à $t_{max} = 25\,\mathrm{s}$ pour la résolution numérique.

Ex. 1 *Résoudre une équation différentielle de manière numérique*

```
> restart :
> with(plots) :
> eq_dif := diff(x(t),t$2)+omega0**2*x(t)=0 ;
> init_cond := x(0)=x_0, D(x)(0)=v_0 ;
> x_0 := 1 ;
> v_0 := 0 ;
> omega0 := 1 ;
> sol_eq := dsolve({eq_dif, init_cond}, x(t), numeric) ;
> t_min := 0 ;
> t_max := 25 ;
> N :=200 ;
> P1 :=odeplot(sol_eq, [t, x(t)], t=t_min..t_max, numpoints=N,color=blue) :
> P2 :=odeplot(sol_eq, [t, diff(x(t),t)], t=t_min..t_max, numpoints=N,color=green) :
> display(P1,P2) ;
> odeplot(sol_eq, [x(t), diff(x(t),t)], t=t_min..t_max, numpoints=N,color=red) ;
```

---

1. Modifier les conditions initiales en prenant une vitesse initiale non nulle et une position nulle à l'instant initial. Le portrait de phase est-il modifié ?

2. On désire maintenant tracer l'évolution d'un oscillateur libre amorti.

   (a) Encapsuler le travail précédent, copier coller celui ci dans un nouvel onglet de travail. Modifier l'équation différentielle précédente afin de faire apparaître un terme d'amortissement.

   (b) Tester différentes valeurs du facteur de qualité : $Q = 3$, $Q = 1/2$ et $Q = 0{,}1$ pour $x_0 = 1$ et $v_0 = 0$.

   (c) Pour $x_0 = 1$, $v_0 = 1$ et $Q = 3$, commenter le portrait de phase obtenu.

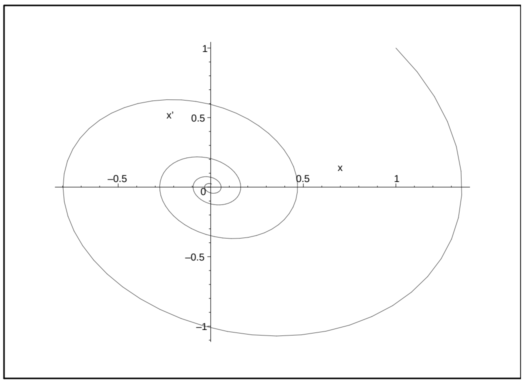


FIGURE 1 –

3. Le système est maintenant un pendule simple amorti.

   (a) Changer d'onglet de travail puis modifier l'équation différentielle de telle manière à ce qu'elle modélise un pendule amorti de variable θ.
   On n'oubliera pas de modifier tout le code correspondant en remplaçant la variable x par θ.

   (b) Trouver les conditions initiales adéquates pour $x_0 = 0$ et $Q = 3$, pour que le pendule fasse un tour et un seul.

   (c) Ces conditions initiales de révolution sont-elles dépendantes de la valeur de Q ? Expliquer.

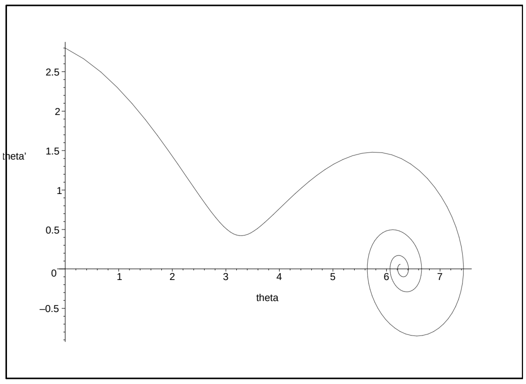


FIGURE 2 –

4. On considère un oscillateur dont la force de rappel dérive de l'énergie potentielle suivante

$$E_p = -\frac{1}{2}k\left(x^2 - \varepsilon x^4\right)$$

   (a) Tracer cette énergie pour différentes valeurs de ε (prendre $0{,}5$ et 1) et montrer qu'il existe toujours deux positions stables et une position instable.
   Le problème est-il conservatif ?

(b) Montrer que l'équation du mouvement de cet oscillateur est

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + 2\varepsilon\omega_0^2 x^3 = 0$$

(c) Fixer $\varepsilon = 0,5$ et calculer les positions d'équilibre stable.

(d) Tester les conditions initiales suivantes en précisant l'endroit où l'on se trouve sur le paysage de potentiel et dans quel sens évolue l'oscillateur.

x_0 (m)	0	2	6	1	-1
v_0 $\left(\text{m.s}^{-1}\right)$	0,2	0	0	1	-2,4

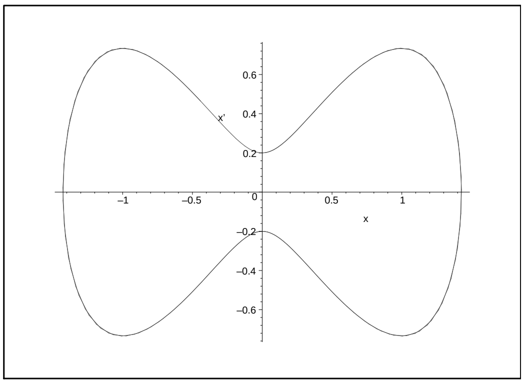
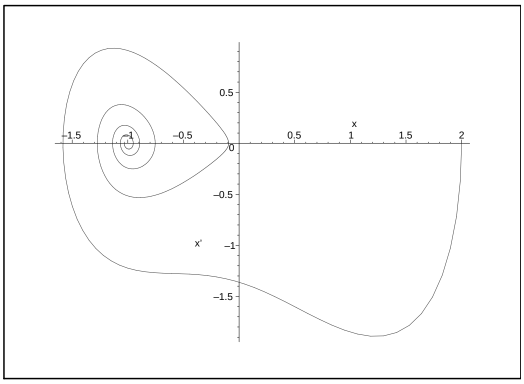
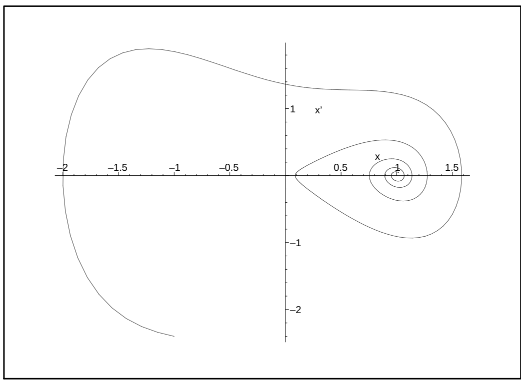


Figure 3 –

(e) Rajouter un terme d'amortissement et fixer Q à 3.
Reprendre la question précédente.



(a)



(b)

Figure 4 –

5. Oscillateur de Van der Pol : L'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{x} + \left(x^2 - p\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Pour un paramètre de valeur $p = 2$ et $\omega_0 = 2\pi$, tracer $v = \dot{x}(t)$ en fonction de x, entre 0 et 5 secondes, pour deux jeux de conditions initiales : $x(t=0) = 0,1\,\text{m}$; $v(t=0) = 0\,\text{m.s}^{-1}$ puis $x(t=0) = 6\,\text{m}$; $v(t=0) = 0\,\text{m.s}^{-1}$.

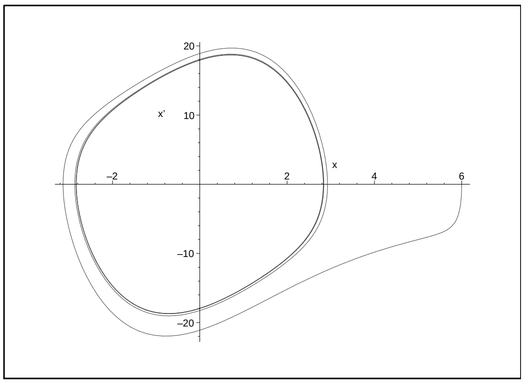


Figure 5 –