Électromagnétisme IV

Mouvement d'une particule chargée

Ex. 1 *Action de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$*

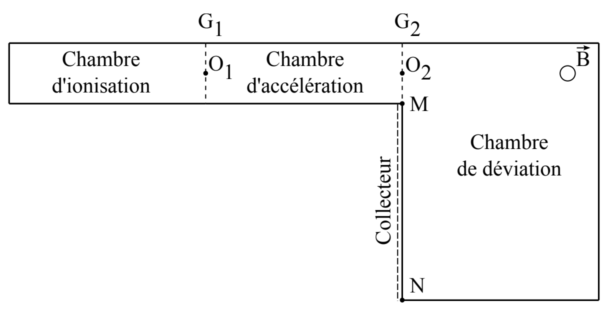
Un électron de charge $q = -1,6.10^{-19}\,\mathrm{C}$ et de masse $m = 9,1.10^{-31}\,\mathrm{kg}$, assimilé à un point matériel M, évolue dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen et muni d'un repère cartésien $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, sous l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\hat{e}_y$ et magnétique $\overrightarrow{B} = B\hat{e}_z$ tous deux uniformes et stationnaires. On désigne par x, y et z les coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}$, et par $\overrightarrow{v}_0 = v_0\hat{e}_x$ le vecteur vitesse initial de M.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la composante v_x de la vitesse de M.
   On pose $\omega_c = |q|\,B/m$.
2. Étudier le mouvement de M si à l'instant initial la vitesse v_0 est nulle et l'électron est en $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Réponses :
1. $d^2v_x/dt^2 + \omega_c^2 v_x = q^2EB/m^2$

Ex. 2 *Spectrographe de masse*

Un spectrographe de masse est constitué de plusieurs parties comme l'indique la figure ci-dessous :



• La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes de potassium ${}^{A_1}_{19}K$ et ${}^{A_2}_{19}K$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions K^+. On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1, la vitesse des ions est quasi-nulle.
• La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1et G_2.
• La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ de direction perpendiculaire au plan de la figure.
• Un collecteur d'ions constitué d'une plaque photosensible et disposé entre M et N.
Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

1. *Accélération des ions :* Établir les expressions des vitesse v_1 et v_2 des ions lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1, m_2 et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.
2. *Déviations des ions*
   (a) Quel doit être le sens du champ magnétique régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
   (b) Montrer que, dans la chambre de déviation, la trajectoire des ions est plane et que leur mouvement est uniforme.
   (c) Montrer que la trajectoire de chaque type d'ion est un cercle, dont on donnera le rayon R_1 (respectivement R_2) en fonction de m_1 (respectivement m_2), e, U et B.
   (d) En admettant que le rapport des masses des ions est égal au rapport de leurs nombres de masse, exprimer le rapport A_1/A_2 en fonction des rayons R_1 et R_2 des trajectoires.

Réponses :
1. $v_i = \sqrt{2eU/m_i}$.
2c. $R_i = (1/B)\,\sqrt{2Um_i/e}$.
2d. $A_2/A_1 = m_2/m_1$ donc $A_2/A_1 = (R_2/R_1)^2$.

Ex. 3 *Piège 2D*

Un piège électronique 2D est un dispositif qui permet, à l'aide d'un champ de nature électromagnétique, de confiner un électron (masse m, charge $q = -e$) dans une petite région de l'espace à deux dimensions. Considérons un électron qui se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\hat{e}_z$, dans un référentiel galiléen $(Ox$, Oy, $Oz)$. L'origine O a été choisie au point où se trouvait l'électron à l'instant pris comme origine et le plan xOz correspond définie par le champ $\overrightarrow{B}$ et la vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$. On désigne par θ_0 l'angle que fait $\overrightarrow{v}_0$ avec $\overrightarrow{B}$.

1. Établir les équations paramétriques du mouvement de l'électron.
   Quelle est la nature de la trajectoire obtenue ?
2. Montrer qu'un tel système se comporte, pour l'électron, comme un piège 2D dont on calculera la largeur maximale caractéristique dans le cas où $v_0 = 10^5\,\mathrm{m.s^{-1}}$.
   On donne $e = 1,6.10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 0,91.10^{-30}\,\mathrm{kg}$ et $B = 5,0.10^{-3}\,\mathrm{T}$.

Réponses :
1. $x\,(t) = (v_0 \sin\theta_0/\omega)\sin\omega t$,
$y\,(t) = (v_0 \sin\theta_0/\omega)\,(1 - \cos\omega t)$,
$z\,(t) = (v_0 \cos\theta_0)\,t$.
2. $L_{\max} = 2,3\,\mathrm{mm}$.

Ex. 4 *Conductivité de l'argent*

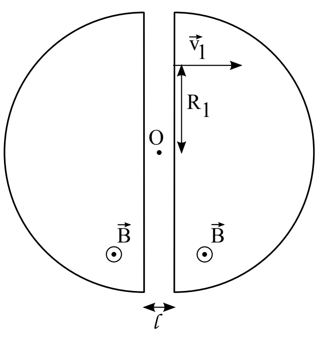
On considère que les électrons de conduction de l'argent (ou électrons libres) de vitesse $\overrightarrow{v}$ sont soumis à un champ électrique local $\overrightarrow{E}$ et à une force de frottement $\overrightarrow{F}_\tau = -m\overrightarrow{v}/\tau$.

1. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un électron.
2. En donner la solution en régime permanent.
En déduire la mobilité des électrons.
3. Donner la solution générale $\overrightarrow{v}(t)$. Proposer une interprétation graphique de τ, et justifier qu'on l'appelle "temps de relaxation".
Calculer τ pour $\mu = -5,25.10^{-3}\,\mathrm{m^2.s^{-1}.V^{-1}}$.
On rappelle la masse d'un électron $m = 9,1.10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et sa charge $q = -e = -1,6.10^{-19}\,\mathrm{C}$.
4. Déduire en régime permanent le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ puis la conductivité σ de l'argent si la densité particulaire d'électrons est $n = 7,4.10^{22}\,\mathrm{e^-.cm^{-3}}$.

Réponses :
2. $\mu = -e\tau/m$.
3. $\tau = 3,0.10^{-14}\,\mathrm{s}$.
4. $\sigma = 6,2.10^7\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

Ex. 5 *Cyclotron*

Le cyclotron est un accélérateur de particules, constitué de deux demi-cylindres métalliques D et D', appelés "dees", d'axe vertical commun (Oz), placés dans le vide, et dans lesquels règne un champ magnétostatique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\hat{e}_z$. Les deux demi-cylindres sont séparés d'une distance l, sur laquelle les particules sont accélérées grâce à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U_m \cos\omega t$. Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est injectée dans le dispositif au voisinage de O, avec une vitesse $\overrightarrow{v}_1 = v_1\hat{e}_x$ sur une trajectoire circulaire centrée en O et de rayon R_1. Le temps de passage d'un dee à l'autre est négligeable, et l'étude se fait dans le cadre de la mécanique newtonienne.



1. Exprimer, en fonction de q, m et B, la fréquence f qu'il convient de donner à la tension accélératrice pour que les particules chargées soient effectivement accélérées chaque fois qu'elles traversent l'espace entre les deux dees.
Application numérique : $m = 1,67.10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $q = +e = +1,6.10^{-19}\,\mathrm{C}$ et $B = 1,00\,\mathrm{T}$.
2. Sachant que la trajectoire d'une particule est formée d'une suite de demi-cercles centrés au voisinage de O, de rayons successifs R_1, R_2, ..., R_n reliés par des éléments de trajectoires rectilignes entre les dees, exprimer le rayon R_n en fonction de q, m, B, n, v_1 et U_m.
3. Des protons sont injectés sur une trajectoire de rayon $R_1 = 5,2.10^{-8}\,\mathrm{m}$, dans un champ $B = 1,00\,\mathrm{T}$, le diamètre utile du cyclotron étant $D = 0625\,\mathrm{m}$ et la tension accélératrice étant d'amplitude $U_m = 2.10^4\,\mathrm{V}$, calculer :
   (a) la vitesse maximale atteinte par les protons sortant tangentiellement du cyclotron, ainsi que l'énergie cinétique acquise, exprimée en joules, puis en mégaélectronsvolts (MeV),
   (b) le nombre de tours effectués par les particules dans l'appareil,
   (c) le temps de transit dans l'appareil, Δt correspondant.
4. On suppose que l'injection se fait en continue au centre de l'accélérateur. On constate cependant que les protons arrivent à la sortie par paquets séparés les uns des autres par le même intervalle de temps.
Expliquer l'origine de ces paquets et calculer l'intervalle de temps séparant deux paquets de protons.

Réponses :
1. $f = 1,53.10^7\,\mathrm{Hz}$.
2. $R_n = \sqrt{R_1^2 + (n-1)\,\frac{2mU_m}{qB^2}}$.
3a. $E_c = 4,7\,\mathrm{MeV}$, 3b. $N = 117$, 3c. $\Delta t = 7,7.10^{-6}\,\mathrm{s}$.
4. $\tau = 0,65\,\mathrm{ns}$.

Ex. 6 *Sonde à effet Hall*

Dans un référentiel galiléen (Ox, Oy, Oz), on considère une plaquette métallique ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de grande longueur L selon Ox, de largeur a selon Oy et de faible épaisseur b ($b \ll a$) selon Oz. Cette plaquette est traversée par un courant d'intensité I constante, associée à un vecteur densité de courant uniforme dirigé selon Ox : $\overrightarrow{j} = j\hat{e}_x$. On note n le nombre d'électrons de conduction (masse m, charge $q = -e$) par unité de volume. Un champ magnétique constant et uniforme $\overrightarrow{B} = B\hat{e}_z$ est appliqué sur le milieu conducteur.

1. On constate qu'il apparaît des charges positives sur des faces dans le plan $y = a/2$ et des charges négatives sur la face du plan $y = -a/2$.
   Proposer une explication au phénomène observé.

2. Les charges ainsi créées, sont responsables de l'apparition d'un champ électrique $\overrightarrow{E}_H$, dirigé selon $-\hat{e}_y$, appelé champ de Hall. On retrouve rapidement un régime permanent d'écoulement de charges mobiles, d'intensité I de vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$.
   Quelle est l'expression de $\overrightarrow{E}_H$ en fonction de n, e, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{B}$?

3. En déduire la tension de Hall $U_H = V_M - V_P$ (M (resp. P) étant le centre de la face où des charges positives (resp. négatives) se sont accumulées) en fonction de e, b, n, I et B.
   Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

4. À la suite d'une erreur de positionnement du contact M, la tension U est mesurée entre P et N, tel que $\overrightarrow{MN} = d\hat{e}_x$. On suppose que le matériau, de conductivité σ, satisfait à la loi d'Ohm locale.
   Exprimer la tension U, mesurée entre P et N, en fonction de U_H, I, σ, a, b et d.

Réponses :
3. $U_H = IB/(neb)$.
4. $U = U_H - Id/(\sigma ab)$.