Électromagnétisme II

Théorème de Gauss

Ex. 1 *Boule chargée en volume*

Une sphère de centre O, rayon R, est chargée avec une densité volumique uniforme $\rho > 0$.

1. Exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ produit en tout point de l'espace ($OM = r$).
2. En déduire le potentiel électrostatique $V(r)$ au point M.
3. Tracer les graphes $E(r)$ et $V(r)$ en justifiant leur relation.
4. Exprimer l'énergie emmagasinée par cette sphère chargée.
5. La sphère précédente noté 1 comporte une cavité sphérique, de centre O_2, de rayon R_2 toute incluse dans la sphère (O_1, R_1).
   Exprimer le champ $\overrightarrow{E}(M)$ dans la cavité.

Réponses :
1. $r > R$: $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ et $r < R$: $E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$.
2. $r > R$: $V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$ et
$r < R$: $V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$.
4. $E_p = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$.
5. $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho\overrightarrow{O_1O_2}}{3\varepsilon_0}$.

Ex. 2 *Câble coaxial cylindrique*

Un câble coaxial cylindrique, est formé de deux cylindres conducteurs très longs, d'axe Oz, séparés par le vide. Le premier, plein de rayon r_1, au potentiel V_1, porte la charge linéique λ_1 ; le second, au potentiel V_2 inférieur à V_1, est creux et de rayon intérieur r_2.

1. Que vaut le champ électrique $\overrightarrow{E}$ en un point intérieur d'un conducteur ?
   Que peut-on en déduire pour le potentiel à l'intérieur et sur la surface ? pour la répartition de charge ?
2. Quel est le signe de λ_1 ?
3. L'ensemble étant en équilibre, quelle est la charge linéique λ_2 de la face interne du cylindre externe ?
4. On suppose le câble coaxial infiniment long. Quelle est la direction de $\overrightarrow{E}$ entre les deux conducteurs ?
   L'évaluer et en déduire la capacité C_l par unité de longueur définie par $\lambda_l / (V_1 - V_2)$ puis calculer numériquement C_l.
   Application numérique : $r_1 = 1\,\text{mm}$; $r_2 = 3\,\text{mm}$; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,84.10^{-12}$ USI.

Réponses :
1. $\overrightarrow{E}(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_r$. 4. $C_l = 50,6\,\text{pF.m}^{-1}$.

Ex. 3 *Fil infini-Ruban infini*

On considère un fil rectiligne $z'z$ de longueur infinie, porteur d'une densité linéique de charge uniforme ($\lambda > 0$).

1. Exprimer le champ électrostatique puis le potentiel créé par ce fil en un point M distant du fil de r en fonction de λ, ε_0 et r.
   Représenter $E(r)$ et $V(r)$.
2. On considère maintenant une bande rectiligne de très grande longueur ($L \to \infty$) et de largeur $2a$, porteur d'une densité surfacique de charge uniforme ($\sigma > 0$), contenue dans le plan xOz.
   Calculer le champ électrique créé par ce ruban en un point M du plan médiateur yOz, distant de y du ruban.
3. En déduire le champ électrique créé par ce ruban lorsque $(y/a) \to 0$.

Réponses :
1. $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.
2. $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\arctan\left(\frac{a}{y}\right)\hat{e}_y$, 3. $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_y$.

Ex. 4 *Modélisation de l'atmosphère*

On modélise l'atmosphère terrestre par une couche d'air comprise entre la Terre, assimilée à une sphère conductrice de rayon R_1, et le bas de l'ionosphère, assimilé à une sphère conductrice de rayon R_2.

Données : $R_1 = 6400\,\text{km}$ et $h = R_2 - R_1 = 50\,\text{km}$.

Les propriétés électrostatiques de l'air sont supposées être identique à celle du vide. On suppose que la Terre porte une charge totale Q uniformément répartie en surface. On note O le centre de la Terre et $\hat{e}_r$ un vecteur unitaire reliant O à un point M de l'atmosphère.

1. Exprimer le champ électrostatique dans l'atmosphère en un point M à une distance r du centre de la Terre, en fonction de Q et ε_0.
2. En déduire l'expression de la différence de potentiel ΔV entre la Terre et l'ionosphère. Simplifier cette expression en considérant que $h \ll R_1$.
3. Exprimer puis calculer la capacité du condensateur ainsi constitué.
   Donnée : $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} \approx 9.10^9\,\text{F}^{-1}\text{.m}$.

Réponses :
1. $\overrightarrow{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$.
2. $\Delta V \approx \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$.
3. $C = 0,09\,\text{F}$.

Ex. 5 *Champ au voisinage de l'axe d'un disque chargé*

On considère un disque uniformément chargé en surface σ d'axe x. On peut montrer que le champ électrostatique créé par ce disque en un point M ($x > 0$) a pour expression :

$$\overrightarrow{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)\hat{e}_x$$

On s'intéresse maintenant au champ créé par le disque au voisinage de l'axe Ox.

1. Que peut on dire de la composante orthoradiale du champ ?
   Montrer que la norme de $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de r et de z.
2. En appliquant le théorème de Gauss, établir une relation entre la composante radiale du champ $E_r(r, x)$, r et la dérivée de $E(x)$ par rapport à x.
3. En déduire l'expression de la composante radiale du champ.

Réponses :
2. $E_r = -\frac{r}{2}\frac{dE(x)}{dx}$, 3. $E_r = \frac{\sigma R^2 r}{4\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}$.

Ex. 6 *Potentiel de Yukawa*

Sous certaines conditions, le potentiel de Yukawa créé par une distribution de charges à symétrie sphérique s'écrit en un point M de l'espace situé à la distance r d'un point O :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-r/a)$$

où $q = e$ est la charge élémentaire et $a = 10^{-10}$ m. Pour une fonction scalaire du type $f(r)$, on admet que l'opérateur gradient s'écrit ($\frac{df}{dr}\hat{e}_r$ où $\hat{e}_r$ est le vecteur unitaire allant de O à M).

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ associé au potentiel V.
2. Exprimer la charge $Q(r)$ contenue dans la boule de centre O et de rayon r.
3. Quelles sont les charges Q limites pour $r \ll a$ et $r \gg a$?
   Quelle distribution de charge simple le potentiel de Yukawa est-il susceptible de modéliser ici ?

Réponses :
1. $\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1 + r/a)\exp(-r/a)\,\hat{e}_r$.
2. $Q(r) = q(1 + r/a)\exp(-r/a)$.

Ex. 7 *Champ de pesanteur au sein d'une cavité d'une planète*

On considère une planète assimilée à une sphère homogène de masse volumique ρ, de centre O_1 et de rayon R_1.

1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel créé par cette planète en un point M distant de r.
   On distinguera les cas $r > R_1$ et $r < R_1$.

Cette planète est percée d'une cavité assimilée à une sphère de centre O_2 et de rayon R_2.

2. Déterminer le champ gravitationnel en un point M de la cavité.
3. En utilisant l'analogie électrostatique-gravitation, donner le champ électrostatique en un point M intérieur à une cavité percée dans une sphère uniformément chargée en volume de charge totale Q (avant que la cavité soit percée).

Réponses :
2. $\overrightarrow{\mathcal{G}} = -\frac{4}{3}\pi\rho G\overrightarrow{O_1O_2}$.
3. $\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho_q\overrightarrow{O_1O_2}$ avec $\rho_q = dq/d\tau$.

Ex. 8 *Distribution de masse inhomogène*

La Terre, sphère de rayon R, de masse M, a sa masse volumique qui varie en fonction de la distance r au centre selon la loi :

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right)$$

avec $r = OP$.

Exprimer le champ de gravitation en tout point P extérieur ou intérieur au globe terrestre en fonction de G, M, R, r et k.

Réponses :
- $r > R$: $\mathcal{G}(r) = -G\frac{M}{r^2}$,
- $r < R$: $\mathcal{G}(r) = -G\frac{Mr}{R^3}\frac{1-3kr^2/5R^2}{1-3k/5}$.