

## Devoir commun de Physique

Lisez tout le texte avant de commencer. La plus grande importance sera attachée à la présentation et à la rédaction. Les réponses doivent être encadrées, exprimées avec les notations strictes de l'énoncé sous leur forme la plus simple. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

**Ce sujet comporte 4 problèmes indépendants. Veillez à rédiger chacun d'entre eux sur des copies séparées.**

**Copie n°1 :, Copie n°2 :, Copie n°3 :, Copie n°4 :**

**Bien préciser en haut de la copie votre nom, prénom, classe et numéro de la copie.**

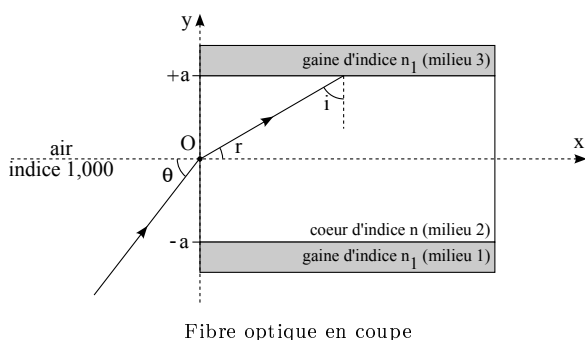
### Problème 1 *Transport de l'information dans une fibre à saut d'indice*

Ce problème concerne l'étude de la propagation de la lumière dans une fibre optique dans le cadre de l'optique géométrique.

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure suivante est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe  $(Ox)$ , de diamètre  $2a$  et d'indice  $n$  entouré d'une gaine optique d'indice  $n_1$  légèrement inférieur à  $n$ . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes, transparents et non chargés. Un rayon situé dans le plan  $(xOy)$  entre dans la fibre en  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta$ .

Les rayons lumineux sont supposés issus d'une radiation monochromatique de fréquence  $f$ , de pulsation  $\omega$  et de longueur d'onde  $\lambda$  dans le milieu constituant le cœur.

1. Les différents angles utiles sont représentés sur la figure suivante.



À quelle condition sur  $i$ , l'angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ?

On note  $i_l$  l'angle d'incidence limite.

2. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence  $\theta$  est inférieur à un angle limite

$\theta_l$  dont on exprimera le sinus en fonction de  $n$  et  $i_l$ .

En déduire l'expression de l'ouverture numérique  $ON = \sin \theta_l$  de la fibre en fonction de  $n$  et  $n_1$  uniquement.

3. Donner la valeur numérique de  $ON$  pour  $n = 1,50$  et  $n_1 = 1,47$ .

On considère une fibre optique de longueur  $L$ . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence  $\theta$  variable compris entre 0 et  $\theta_l$ . On note  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

4. Pour quelle valeur de l'angle  $\theta$ , le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal ? maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps  $\delta t$  entre le rayon de parcours minimal et maximal en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n$  et  $n_1$ .

5. On pose  $2\Delta = 1 - (n_1/n)^2$ . On admet que pour les fibres optiques  $\Delta \ll 1$ .

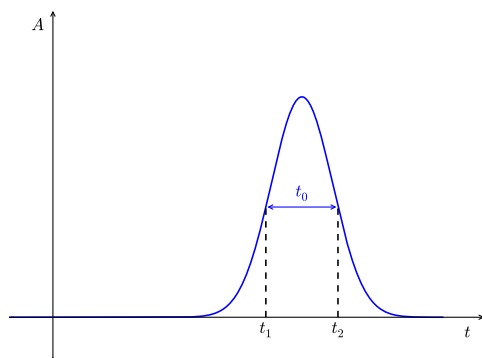
Donner dans ce cas l'expression approchée de  $\delta t$  en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n$  et  $\Delta$ .

On conservera cette expression de  $\delta t$  pour la suite du problème.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique  $t_0 = t_2 - t_1$  formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et  $\theta_l$ . La figure suivante représente l'allure de l'amplitude  $A$  du signal lumineux en fonction du temps  $t$ .

6. Reproduire la figure en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre.

Quelle est la durée du temps caractéristique  $t'_0$  de l'impulsion lumineuse en sortie de la fibre ?



Impulsion lumineuse

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission  $F$ .

7. En supposant  $t_0$  négligeable devant  $\delta t$ , quelle condition portant sur la fréquence d'émission  $F$  exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour une fréquence  $F$  donnée, on définit la longueur maximale  $L_{\max}$  de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de non recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit  $B = L_{\max} \times F$ .

8. Exprimer la bande passante  $B$  en fonction de  $c$ ,  $n$  et  $\Delta$ .
9. Calculer la valeur numérique de  $\Delta$  et de la bande passante  $B$  (exprimée en MHz.km) avec les valeurs  $n$  et  $n_1$  données dans la question 3.

Pour un débit d'information de  $F = 100 \text{ Mbits.s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$ , quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ?

Commenter la valeur de  $L_{\max}$  obtenue.

**Fin du problème 1**

## Problème 2 Étude d'un condensateur

Les parties A et B du problème sont indépendantes

### A. Condensateur plan

Deux plans parallèles, infiniment étendus dans les directions  $x$  et  $y$ , de côtes  $-e/2$  et  $e/2$  sur l'axe  $Oz$ , possèdent respectivement une densité surfacique de charges  $-\sigma$  et  $+\sigma$ .

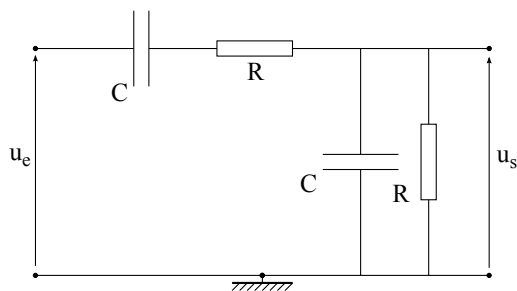
1. Quelle est la direction du champ électrique  $\vec{E}$  ?  
De quelle(s) coordonnée(s) dépend-il ?  
Quel est l'effet sur  $\vec{E}$  d'un changement de  $z$  en  $-z$  ?
2. En appliquant le théorème de Gauss à une surface judicieusement choisie, déterminer  $\vec{E}$ , champ électrostatique total, en tout point de l'espace en dehors des plans.
3. Déterminer la différence de potentiel,  $U = V^+ - V^-$ , entre les deux armatures en fonction de  $\sigma$ ,  $e$  et  $\varepsilon_0$  (permittivité du vide).  
On utilisera le potentiel  $V^+$  pour la surface chargée avec la densité surfacique  $+\sigma$ .
4. En introduisant l'aire  $S$  des armatures, exprimer la tension  $U$  en fonction de  $q$ ,  $e$ ,  $S$  et  $\varepsilon_0$  ; puis donner la valeur de la capacité du condensateur ainsi défini en fonction de  $S$ ,  $e$  et  $\varepsilon_0$ .
5. Calculer la capacité d'un condensateur dont les armatures sont des carrés de  $d = 10,0 \text{ cm}$  de côté, séparés par une distance  $e = 1,00 \text{ cm}$ .  
On donne  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .  
Commenter cette valeur en la comparant à celles des capacités des condensateurs utilisés en électrocinétique.
6. À quelle condition les plans peuvent-ils être considérés comme infiniment étendus ?

### B. Oscillateur de Wien

Le condensateur étudié précédemment est inséré dans un montage électronique dont la fréquence de fonctionnement est dépendante de la capacité calculée en partie A. Aucun résultat de la partie précédente n'est nécessaire pour répondre aux questions suivantes.

#### B.1. Filtre de Wien

On considère le filtre dit de Wien ci-après où les résistances  $R$  sont identiques ainsi que les capacités  $C$  des condensateurs.



7. Le filtre est alimenté par une tension d'entrée  $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ . À la sortie, on a alors une tension  $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$ . Il n'y a pas d'impédance de charge à la sortie (tension à vide). On associe à ces tensions les grandeurs complexes :  $\underline{u_e}(t) = \underline{U_e} e^{j\omega t}$  avec  $\underline{U_e} = U_e$  et  $\underline{u_s}(t) = \underline{U_s} e^{j\omega t}$  avec  $\underline{U_s} = U_s e^{j\varphi}$ .

Établir la fonction de transfert sous la forme :

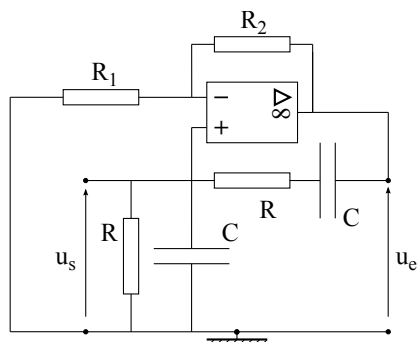
$$\underline{H}\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

en précisant les valeurs de  $A$ , de  $Q$  et l'expression de  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $C$ .

8. Après avoir fait une étude asymptotique de cette fonction de transfert, tracer son diagramme de Bode, en gain  $G_{dB}$  et en phase  $\varphi$ , (en coordonnées semi-logarithmiques, on utilisera la coordonnée réduite  $x = \omega/\omega_0$  ; on donne  $\log 3 \approx 0,5$ ).
9. Le filtre est à présent alimenté par une tension d'entrée quelconque, dont la valeur instantanée est  $u_e(t)$ . Établir l'équation différentielle liant  $u_s$  à  $u_e$ .

### B.2. Oscillateur

Le filtre de Wien est couplé à un amplificateur opérationnel (AO) parfait dont le fonctionnement est supposé linéaire. Aucun générateur n'est présent dans le montage.



10. Qu'appelle-t-on amplificateur opérationnel "parfait" (ou "idéal") ?  
Que signifie l'expression "fonctionnement linéaire" ?
11. Établir la relation entre  $V^-$ , potentiel à l'entrée inverseuse de l'AO et  $u_e$  en fonction de  $R_1$  et  $R_2$ .

12. En déduire que l'équation différentielle vérifiée par  $u_s(t)$  est :

$$\ddot{u}_s(t) + \frac{\omega_0}{Q} \left[ 1 - A \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \right] \dot{u}_s(t) + \omega_0^2 u_s(t) = 0$$

13. À quelle condition la solution de cette équation est-elle purement sinusoïdale ?
14. Que se passe-t-il si le terme  $1 - A \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)$  est strictement négatif ?  
Quel est alors le mode de fonctionnement de l'AO ?

**Fin du problème 2**

### Problème 3 Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

On compare les efficacités des cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling. Ce dernier cycle présente des caractéristiques intéressantes, notamment un faible niveau de pollution, une durée de vie élevée et une excellente efficacité.

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

#### A. Entropie d'un gaz parfait

Le rapport  $\gamma$  des capacités thermiques isobare et isochore d'un gaz parfait est 1,67 pour un gaz monoatomique, tel que l'argon, et 1,4 pour un gaz diatomique, tel que l'air.

- Établir l'expression de la variation élémentaire de l'entropie d'un gaz parfait monoatomique en fonction de sa température  $T$  et de sa pression  $P$ .  
Montrer que l'entropie du gaz peut s'écrire :

$$S = \alpha (-\ln P + \beta \ln T + Cte)$$

$\alpha$  étant un coefficient que l'on exprimera, en fonction du nombre  $n$  de moles et de la constante  $R$  des gaz parfaits, et  $\beta$  un facteur que l'on déterminera.

La constante  $Cte$  qui apparaît dans la formule précédente a pu être déterminée expérimentalement à l'aide du graphe  $C_p(T)$  donnant la capacité thermique molaire de l'argon gazeux, sous 1 bar, en fonction de la température.

Comment accède-t-on à l'entropie à partir de  $C_p(T)$  ?

- Dans le cas d'un gaz parfait diatomique,  $\beta = 7/2$ .  
En déduire la relation entre la pression et la température d'un gaz parfait diatomique au cours d'une évolution isentropique.

#### B. Cycle de Beau de Rochas et Otto

Dans un moteur à explosion, le fluide, de masse  $m = 2,9 \text{ g}$ , assimilé à un gaz parfait diatomique, de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ , suit une évolution cyclique réversible  $ABCD$ , constituée de deux portions isentropiques,  $AB$  et  $CD$ , séparées par deux portions isochores,  $BC$  et  $DA$ . Le cycle n'est plus ditherme : il y a mise en contact du fluide avec une succession de sources chaudes et froides. Les températures et les pressions aux points  $A$  et  $C$  sont :  $T_A = 290 \text{ K}$ ,  $P_A = 1 \text{ bar}$ ,  $T_C = 1450 \text{ K}$  et  $P_C = 40 \text{ bar}$ .

En outre, le taux de compression  $\alpha_v = V_A/V_C$  est égal à 8.

- Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes  $AB$  et  $CD$  ?  
Calculer les pressions, en bar,  $P_B$  et  $P_D$  en  $B$  et  $D$  respectivement, ainsi que les volumes en litre en ces points.

- Représenter le cycle  $ABCD$  dans le diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ).  
Justifier le sens de description du cycle.
- Calculer le travail et la chaleur algébriquement reçus par le gaz sur chaque portion du cycle.  
Vérifier l'existence d'une relation simple entre toutes les grandeurs calculées.
- Quelle est l'efficacité  $\eta_{BO}$  de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion  $BC$  du diagramme ?  
Comparer  $\eta_{BO}$  à l'efficacité  $\eta_C$  d'un cycle moteur ditherme fonctionnant entre les températures  $T_A$  et  $T_C$ .  
Commenter.

#### C. Cycle de Stirling

Dans un cycle de Stirling, une même masse d'air ( $m = 2,9 \text{ g}$ ) suit une évolution cyclique réversible  $A'B'C'D'$ , constituée de deux portions isothermes  $A'B'$  et  $C'D'$  séparées par deux portions isochores  $B'C'$  et  $D'A'$ . Les températures et les pressions aux points  $A'$  et  $C'$  sont les mêmes qu'aux points  $A$  et  $C$  respectivement. Le taux de compression ( $\alpha_v = V_A/V_C$ ) est aussi le même que précédemment.

- Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes  $A'B'$  et  $C'D'$  ?  
En déduire les pressions  $P_{B'}$  et  $P_{D'}$ , en  $B'$  et  $D'$ , respectivement.
- Représenter le cycle  $A'B'C'D'$  dans le diagramme de Clapeyron.  
Comparer ce diagramme au précédent.
- Calculer le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle.
- Les échanges thermiques au cours des évolutions isochores se font à l'aide d'un régénérateur interne à la machine. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les phases isothermes.  
Quelle est l'efficacité  $\eta_S$  de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion  $C'D'$  du diagramme ?  
Comparer  $\eta_S$  à  $\eta_{BO}$  et  $\eta_C$ .

**Fin du problème 3**

**Problème 4** Dynamique en référentiel tournantRappels concernant les changements de référentiels :

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_G$ , un point matériel  $M$  de masse  $m$  est soumis aux forces d'inertie de Coriolis  $\vec{F}_{ic}$  et d'entraînement  $\vec{F}_{ie}$ .

Dans le cas où le référentiel  $\mathcal{R}$  a un mouvement de rotation uniforme de vecteur  $\vec{\omega}$  autour d'un axe fixe  $(\Delta)$  par rapport à  $\mathcal{R}_G$ , on a :

- $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$  où  $\vec{v}_r$  désigne la vitesse du mouvement relatif de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)$  où  $\vec{a}_e(M)$  désigne l'accélération d'entraînement du point  $M$  donnée par  $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM}$ ,  $H$  étant la projection orthogonale du point  $M$  sur l'axe  $(\Delta)$ .

Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau  $M$  de masse  $m$ , considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer **sans frottements** le long d'une tige  $OA$ , de longueur  $l$ , effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire  $\omega$  constante autour d'un axe fixe vertical  $(\Delta)$  passant par son extrémité  $O$ .

Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au laboratoire et tel que :

$\vec{e}_x$  : vecteur unitaire de l'axe horizontal  $Ox$ .

$\vec{e}_y$  : vecteur unitaire de l'axe horizontal  $Oy$ .

$\vec{e}_z$  : vecteur unitaire de l'axe vertical  $Oz$ .

On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_T$  définis de la manière suivante :

$\vec{e}_r$  : vecteur unitaire du plan  $(Oxy)$  dirigé suivant la projection de la tige dans le plan  $(Oxy)$  et orienté dans le sens  $\vec{OA}$  de la tige.

$\vec{e}_\theta$  : vecteur unitaire du plan  $(Oxy)$ , perpendiculaire au vecteur  $\vec{e}_r$  et tel que le repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  soit un repère direct.

$\vec{e}_T$  : vecteur unitaire de la tige et orienté de  $O$  vers  $A$ .

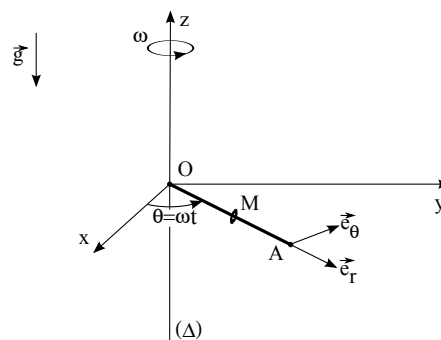
**A. La tige  $OA$  est dans le plan horizontal**

La tige  $OA$  se trouve dans le plan horizontal  $(xOy)$  et tourne autour de l'axe vertical  $(\Delta)$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . L'axe  $(\Delta)$  est ainsi confondu avec l'axe  $Oz$ .

Dans ce cas on a donc :  $\vec{e}_r = \vec{e}_T$ .

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance  $r_0$  du point  $O$  ( $0 < r_0 < l$ ).

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance  $r$  entre le point  $O$  et l'anneau  $M$  ( $r = OM$ ).

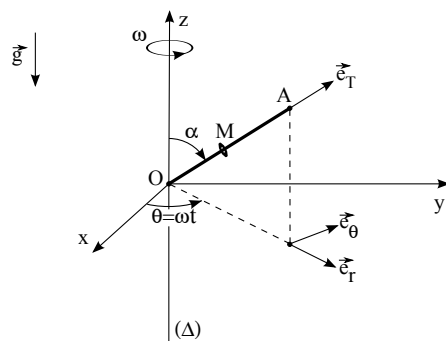


L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

1. L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.  
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.  
Écrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$ ,  $r$  et des vecteurs unitaires définis précédemment.  
Quels sont les vecteurs unitaires qui portent les composantes de la réaction de la tige ?
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$ .
3. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution  $r(t)$  en fonction de  $r_0$ ,  $\omega$  et  $t$ .
4. En déduire l'expression du temps  $\tau$  que va mettre l'anneau pour quitter la tige.  
On exprimera  $\tau$  en fonction de  $r_0$ ,  $l$  et  $\omega$ .
5. Déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{v}_f$ , calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de  $r_0$ ,  $l$ ,  $\omega$  et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.  
En déduire l'expression de la vitesse  $\vec{v}'_f$ , calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de  $r_0$ ,  $l$ ,  $\omega$  et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

**B. La tige fait un angle  $\alpha$  quelconque avec l'axe  $(\Delta)$** 

La tige  $OA$  fait maintenant un angle  $\alpha$  ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$  rad) avec l'axe  $(\Delta)$ . La tige tourne autour de  $(\Delta)$  avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ . On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance  $r$  entre le point  $O$  et l'anneau  $M$  ( $r = OM$ ). L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance  $r_0$  du point  $O$  ( $r_0 < l$ ).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

6. L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.  
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.  
Écrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$ ,  $r$ ,  $\alpha$  et des vecteurs unitaires définis précédemment.
7. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$ .
8. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution  $r(t)$  en fonction de  $r_0$ ,  $\alpha$ ,  $g$ ,  $\omega$  et  $t$ .
9. Déterminer la position d'équilibre  $r_{eq}$  de l'anneau sur la tige.  
Exprimer  $r_{eq}$  en fonction de  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $g$ .  
Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige  $OA$  que si la vitesse angulaire  $\omega$  est supérieure à une valeur seuil  $\omega_0$  que l'on déterminera.  
Exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $\alpha$ ,  $g$  et  $l$ .
10. On se place dans le cas où  $\omega > \omega_0$ , l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre.  
Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau?  
En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

**Fin du problème 4**